EXACT MOMENTS OF THE MULTIVARIATE F AND BETA DISTRIBUTIONS(Asymptotic Methods of Statistics)

数理解析研究所講究録
645巻 1988年 105-113

EXACT MOMENTS OF THE MULTIVARIATE F AND BETA DISTRIBUTIONS

筑波大 数学 今野 良彦
Yoshihiko Konno

§1序

多変量F分布及びBeta分布に関する部分積分の公式（F identityとBeta identity）を求め、それを用いてこれら二つの分布の正確な2次のモーメントを導出することを考える。

§2 準備

m x mの正定値確率行列FとBがそれぞれ多変量F分布と多変量Beta分布に従い、確率密度関数

$$f_1(F) = K\,|\Delta|^{\frac{n_2}{2}}\,|F|^{\frac{n_1-m-1}{2}}\,|\Delta+F|^{-\frac{n}{2}} \qquad (1)$$

と

$$f_2(B) = K\,|\Delta|^{-\frac{n-m-1}{2}}\,|B|^{\frac{n_1-m-1}{2}}\,|\Delta-B|^{\frac{n_2-m-1}{2}} \qquad (2)$$

を持つとする。ただし、

$$K = \frac{\Gamma_m(\frac{n}{2})}{\Gamma_m(\frac{n_1}{2})\,\Gamma_m(\frac{n_2}{2})}, \quad \Gamma_m(a) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{i=1}^{m}\Gamma(a-\frac{i-1}{2})$$

$n = n_1 + n_2$, $n_1 > m+1$, $n_2 > m+1$, Δは正定値のパラメーター行列とする。我々は、この二つの分布を$F_m(n_1, n_2; \Delta)$と$B_m(n_1, n_2; \Delta)$と記すことにする。

これらの分布は、Wishart分布がχ^2分布の多次元への拡張であるように、一次元のFとBeta分布の一つの拡張として考えることができる。この二つの分布については、Katri(1970)、Olkin and

Rubin(1964)、Tan(1969)、Mitra(1970), De Waal(1970), Perlman(1977), Dawid(1981)等により議論されている。

<u>§3　F　identitiy</u>　F　identityを述べるために、次の記号を用意する。m×mの行列Q＝(q_{ij})に対して、ノルムを $\|Q\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}^2\right)^{1/2}$ とし、$Q_{(\frac{1}{2})}$＝((1/2)(1＋δ_{ij}) q_{ij})とする。ただし、δ_{ij} はクロネッカー・デルターとする。

<u>定理 1</u>　m×m の行列 $V=(V_{ij}(F,\Delta))$ とスカラーh(F)が以下の条件を満たすと仮定する。

(i)・$V_{ij}(F,\Delta)$ h(F)が領域

$$\Re=\Re(\rho_1,\rho_2)=\{F;F\geq 0,\ 0\leq\rho_1\leq\|F\|\leq\rho_2\}$$

でストークスの定理の条件を満たす。

(ii)　$b_1(R)=\{F;F\geqslant 0,\ \|F\|=\rho_1\}$ 上において

$$\lim_{\rho_1\to+0}\ \sup_{F\in b_1(\Re)}\ \frac{|h(F)|\ \|V(F,\Delta)\|}{\rho_1^{\,1-\frac{mn_1}{2}}}=0$$

が成立する。

(iii) $b_2(R)=\{F;\ F\geqslant 0,\ \|F\|=\rho_2\}$　上において

$$\lim_{\rho_2\to+\infty}\ \sup_{F\in b_2(\Re)}\ \frac{|h(F)|\ \|V(F,\Delta)\|}{\rho_2^{\,\frac{mn_2}{2}+1}}=0$$

が成立するとする。

そのとき、

$$E_F[\,h(F)\mathrm{tr}(\Delta+F)^{-1}V] = E_F[\frac{2}{n}h(F)\mathrm{tr}(DV) + \frac{2}{n}\mathrm{tr}(\frac{\partial h(F)}{\partial F}.V_{(\frac{1}{2})}) + \frac{n_1-m-1}{n}h(F)\mathrm{tr}(F^{-1}V)] \qquad (3)$$

が成りたつ。ただし、$n = n_1 + n_2$, $D=((1/2)(1+\delta_{ij})\,\partial/\partial F_{ij})$ とする.

注意　（３）において、ｈ（Ｆ）を定数とすれば、Muirhead and Verathaworn (1985) の identity が得られる。

このＦ identity は Haff（１９７９）の Wishart identityを多変量Ｆ分布に応用したものである。以下、 h(F)とV(F, Δ)をうまく定めることにより、多変量Ｆ分布のモーメントを求める。

定理　２　Ｆが確率密度関数(1)を持ち、 $n_2 - m - 1 > 0$ とすれば、

(i) $$E[F_{ij}] = \frac{n_1}{n_2-m-1}\Delta_{ij}$$

$n_2 - m - 3 > 0$ とすれば、

(ii) $$E[F_{ij}F_{kl}] = \frac{n_1}{(n_2-m)(n_2-m-1)(n_2-m-3)}[\{n_1(n_2-m-2)+2\}\Delta_{ij}\Delta_{kl} + (n-m-1)(\Delta_{jl}\Delta_{ik} + \Delta_{kj}\Delta_{il})]$$

(iii) $$\mathrm{Cov}(F_{ij}, F_{kl}) = \frac{n_1(n-m-1)}{(n_2-m)(n_2-m-1)(n_2-m-3)}\{\frac{2}{n_2-m-1}\Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{jl}\Delta_{ki} + \Delta_{kj}\Delta_{il}\}$$

(iv) $$E[FAF] = \frac{n_1}{(n_2-m)(n_2-m-1)(n_2-m-3)}[\{n_1(n_2-m-2)+2\}\Delta A\Delta + (n-m-1)\{(\Delta A\Delta)^t + \mathrm{tr}(\Delta A)\Delta\}]$$

ただし、$\Delta = (\Delta_{ij})$、Ａはｍｘｍの任意の行列とする。

我々の求めたＦのモーメントより、Wishartモーメントを得ることができる。定理２の(iii)において、$F^* = n_2 F$、 Ａ

を対称行列とすれば、

$$\lim_{n_2 \to +\infty} E[F^* A F^*] = n_1(n_1+1)\Delta A \Delta + n_1 \mathrm{tr}(\Delta A)\Delta$$

となる。上の式の右辺は、WがWishart分布$W_m(n_1, \Delta)$に従うときの$E_W[WAW]$に一致することが、F^*がWに弱収束することよりわかる。

定理２において、モーメントをF identityを使って導出したが、Wishart分布の共分散行列に逆Wiahart priorを仮定することにより、同様の結果を得ることができることがProfessor Sinhaにより指摘された。ここで、その別証明について少し述べる。

今、

$$W \sim W_m(n_1, \Delta), \qquad \Sigma^{-1} \sim W_m(n_2, \Delta^{-1})$$

を仮定する。WとΣ^{-1}の同時密度関数は $(n = n_1 + n_2)$

$$\frac{2^{-\frac{mn}{2}} |A|^{\frac{n_2}{2}} |W|^{\frac{n_1-m-1}{2}}}{\Gamma_m(\frac{n_1}{2})\Gamma_m(\frac{n_2}{2}) |\Sigma|^{\frac{n-m-1}{2}}} \mathrm{etr}\{-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(W+\Delta)\} \ (dW)(d\Sigma^{-1})$$

となる。ここで、$\Phi = (W+\Delta)^{1/2}\Sigma^{-1}(W+\Delta)^{1/2}$なる変換をすれば、$\Phi$とWの同時密度関数

$$\frac{2^{-\frac{mn}{2}} |\Delta|^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma_m(\frac{n_1}{2})\Gamma_m(\frac{n_2}{2})} \frac{|W|^{\frac{n_1-m-1}{2}}}{|W+\Delta|^{\frac{n}{2}}} |\Phi|^{\frac{n-m-1}{2}} \mathrm{etr}(-\frac{1}{2}\Phi) \quad (dW)(d\Phi)$$

を得る。Φに関して積分をすると、Wの周辺分布が$F_m(n_1, n_2; \Delta)$

になることが示される。そこで、Fの二次のモーメントは

$$\iint W_{ij}W_{kl}\,\frac{2^{-\frac{mn}{2}}|\Delta|^{\frac{n_2}{2}}|W|^{\frac{n_1-m-1}{2}}}{\Gamma_m(\frac{n_1}{2})\,\Gamma_m(\frac{n_2}{2})\,|\Sigma|^{\frac{n-m-1}{2}}}\,\mathrm{etr}\{-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(W+\Delta)\}\ (dW)\,(d\Phi)$$

と表現されることがわかる。上の式をWと Σ^{-1} について順次積分すると定理２の(ii)をえる。

Fが $F_m(n_1, n_2; \Delta)$ に従うとき、F^{-1} の分布が $F_m(n_2, n_1; \Delta^{-1})$ となることより、ただちに次の定理が得られる。

<u>定理３</u>　$n_1-m-1>0$ とすれば、

(i) $$E[F^{-1}]=\frac{n_2}{n_1-m-1}\Delta^{-1}$$

$n_1-m-3>0$ とすれば、

(ii) $$E[F^{ij}F^{kl}]=\frac{n_2}{(n_1-m)(n_1-m-1)(n_1-m-3)}[\{n_2(n_1-m-2)+2\}\Delta^{ij}\Delta^{kl}+(n-m-1)(\Delta^{jl}\Delta^{ik}+\Delta^{kj}\Delta^{il})]$$

(iii) $$\mathrm{Cov}(F^{ij},F^{kl})=\frac{n_2(n-m-1)}{(n_1-m)(n_1-m-1)(n_1-m-3)}[\frac{2}{n_1-m-1}\Delta^{ij}\Delta^{kl}+\Delta^{jl}\Delta^{ik}+\Delta^{kj}\Delta^{il}]$$

(iv) $$E[F^{-1}AF^{-1}]=\frac{n_2}{(n_1-m)(n_1-m-1)(n_1-m-3)}[\{n_2(n_1-m-2)+2\}\Delta^{-1}A\Delta^{-1}$$
$$+(n-m-1)\{(\Delta^{-1}A\Delta^{-1})^t+\mathrm{tr}(\Delta^{-1}A)\Delta^{-1}\}]$$

ただし、$\Delta^{-1}=(\Delta^{ij})$、Aはm x mの任意の行列とする。

<u>§ 4 Beta identity</u>　多変量Beta分布のモーメントをここでは、Beta identityを用いて求める。

<u>定理 4</u>　m x m の行列 $T=(T_{ij}(B,\Delta))$とスカラーg(F)が以下の条件を満たすと仮定する。

(i) $T_{ij}(B,\Delta)g(B)$が領域

$$\Re=\Re(\rho_1,\rho_2)=\{B;0\le B\le\Delta,\ ||B||\ge\rho_1\ge 0,\ ||\Delta-B||\ge\rho_2\ \ge 0\}$$

でストークスの定理の条件を満たす。

(ii) $b_1(R)=\{B;B\geqslant 0,\ \|B\|=\rho_1\}$ 上において

$$\lim_{\rho_1\to+0}\sup_{B\in b_1(\Re)}\frac{|g(B)|\ ||T(B,\Delta)||}{\rho_1^{1-\frac{mn_1}{2}}}=0$$

が成立する。

(iii) $b_2(R)=\{B;\Delta-B\geqslant 0,\ \|\Delta-B\|=\rho_2\}$ 上において

$$\lim_{\rho_2\to+0}\sup_{B\in b_2(\Re)}\frac{|g(B)|\ ||T(B,\Delta)||}{\rho_2^{1-\frac{mn_2}{2}}}=0$$

が成立するとする。

そのとき、

$$E_B[g(B)tr(\Delta-B)^{-1}T]=E_B[\frac{2}{n_2-m-1}g(B)tr(DT)+\frac{2}{n_2-m-1}tr(\frac{\partial g(B)}{\partial B}T_{(\frac{1}{2})})+\frac{n_1-m-1}{n_2-m-1}g(B)tr(B^{-1}T)]$$

が成りたつ。ただし、$n=n_1+n_2$, $D=((1/2)(1+\delta_{ij})\ \partial/\partial B_{ij})$ とする.

<u>定理5</u>　Bが確率密度関数(2)を持つとする。

(i)　$$E[B]=\frac{n_1}{n}\Delta$$

(ii)　$$E[B_{ij}B_{kl}]=\frac{n_1}{n(n-1)(n+2)}[\{n_1(n+1)-2\}\Delta_{ij}\Delta_{kl}+n_2(\Delta_{jl}\Delta_{ki}+\Delta_{il}\Delta_{kj})]$$

(iii) $$\mathrm{Cov}(B_{ij},B_{kl})=\frac{n_1n_2}{n(n-1)(n+2)}\left[-\frac{2}{n}\Delta_{ij}\Delta_{kl}+\Delta_{jl}\Delta_{ik}+\Delta_{il}\Delta_{kj}\right]$$

(iv) $$E[BAB]=\frac{n_1}{n(n-1)(n+2)}\left[\{n_1(n+1)-2\}\Delta A\Delta+n_2\{(\Delta A\Delta)^t+\mathrm{tr}(\Delta A)\Delta\}\right]$$

ただし、$\Delta=(\Delta_{ij})$，Aはm x mの任意の行列とする。

Tan (1969) により、$F\sim F_m(n_1, n_2; \Delta)$ならば、$\Delta(\Delta+F)^{-1}F\sim B_m(n_1, n_2; \Delta)$となり、$B\sim B_m(n_1, n_2; \Delta)$ならば、$\Delta(\Delta-B)^{-1}B\sim F_m(n_1, n_2; \Delta)$となる。これより、$F^{-1}+\Delta^{-1}=B^{-1}$なる関係式が得られ、ただちにBの逆行列のモーメントが得られる。

<u>定理6</u>　$n_1-m-1>0$の時

(i) $$E[B^{-1}]=\frac{n-m-1}{n_1-m-1}\Delta^{-1}$$

$n_1-m-3>0$の時

(ii) $$E[B^{ij}B^{kl}]=\frac{n-m-1}{(n_1-m)(n_1-m-1)(n_1-m-3)}\left[\{(n-m)(n_1-m-3)+n_2\}\Delta^{ij}\Delta^{kl}+n_2(\Delta^{jl}\Delta^{ik}+\Delta^{il}\Delta^{kj})\right]$$

(iii) $$\mathrm{Cov}(B^{ij},B^{kl})=\frac{n_2(n-m-1)}{(n_1-m)(n_1-m-1)(n_1-m-3)}\left[\frac{2}{n_1-m-1}\Delta^{ij}\Delta^{kl}+\Delta^{il}\Delta^{kj}+\Delta^{jl}\Delta^{ik}\right]$$

(iv) $$E[B^{-1}AB^{-1}]=\frac{n-m-1}{(n_1-m)(n_1-m-1)(n_1-m-3)}\left[\{(n-m)(n_1-m-3)+n_2\}\Delta^{-1}A\Delta^{-1}\right.$$
$$\left.+n_2\{(\Delta^{-1}A\Delta^{-1})^t+\mathrm{tr}(\Delta^{-1}A)\Delta^{-1}\}\right]$$

ただし、$\Delta^{-1}=(\Delta^{ij})$，Aはm x mの任意の行列とする。

<u>§4　Fの scale matrix の推定</u>　次に、$\hat{\Delta}$ (F)による Δ の推定問題を損失関数

$$L(\hat{\Delta}, \Delta) = \mathrm{tr}(\hat{\Delta}\Delta^{-1}) - \log\det(\hat{\Delta}\Delta^{-1}) - m \qquad (5)$$

のもとで考える。不偏推定量 $\hat{\Delta}_U = \{(n_2 - m - 1)/n_1\}F$ は αF（α は定数）なる推定量の族の中で最良となることがわかる。ここで、$\hat{\Delta}(F) = \frac{n_2 - m - 1}{n_1}\{F + (a/\mathrm{tr}F^{-1})I_m\}$ なる推定量を考える。ただし、a は非負の定数とする。定理1より、次の補題を得ることができる。

<u>補題7</u>　Fが（1）の確率密度関数を持つとき、不等式

$$E\left[\frac{\mathrm{tr}\,\Delta^{-1}}{\mathrm{tr}\,F^{-1}}\right] \le \frac{n_1 - m + 1}{n_2 - 2}$$

が成り立つ。ただし、等号成立は m = 1 の時のみ。

この補題を用いることで、次の定理がわかる。

<u>定理8</u>　$0 < a < 2(m-1)(n_1 + n_2 - m - 1)/(n_1(n_2 - 2))$ のとき

$$\hat{\Delta}(F) = \frac{n_2 - m - 1}{n_1}\left(F + \frac{a}{\mathrm{tr}F^{-1}} I_m\right)$$

は損失関数（5）のもとで $\hat{\Delta}_U$ を一様に改良する。

References

[1] Dawid, A. P. (1981). Some matrix-variate distribution theory: Notational condsiderations and a Bayesian application. *Biometrika.* **68** 265-274.

[2] De Waal, D. J. (1970). Distributions connected with a multivariate Beta statistic. *Ann. Math. Statist.* **41** 1091-1095.

[3] Haff, L.R. (1979). An identity for the Wishart distribution with applications. *J. of Multi. analysis.* **9** 531-544.

[4] Khatri, C. G. (1970). A note on Mitra's paper " A density - free approach to the matrix variate beta distribution." Sankhyā, Series A. **32** 311-318.

[5] Mitra, S. K. (1970). A density-free approach to the matrix variate Beta distribution. *Sanhkyā, Series A.* **32** 81-88.

[6] Muirhead, J. and Verathaworn, T. (1985). On estimating the latent roots of $\Sigma_1\Sigma_2^{-1}$. P.R. Krishnaiah, ed., *Multivariate Analysis - VI.* 431-447.

[7] Olkin, I. and Rubin, H. (1964). Multivariate Beta distributions and independence properties of the Wishart distribution. *Ann. Math. Statist.* **35** 261-269.

[8] Perlman, M. D. (1977). A note on the matrix-variate F distributon.*Sankhyā, Series A.* **39** 290-298.

[9] Tan, W. Y. (1969). Note on the multivariate and the generalized multivariate Beta distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **64** 230-241.